

### Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen.

Von H. Motzfeld in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die der mittleren Geschwindigkeit einer turbulenten Strömung überlagerten Geschwindigkeitsschwankungen lassen sich zusammengesetzt denken aus einer sehr großen Anzahl von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenz und verschiedener Amplitude. Für viele theoretische und auch experimentelle Fragen ist es nun von Bedeutung zu wissen, wie sich die gesamte Schwankungsenergie über den vorkommenden Frequenzbereich verteilt, d. h. man fragt nach dem Spektrum der turbulenten Schwankungsbewegung.

Ist  $u'(t)$  die an einem festen Punkt innerhalb einer turbulenten Strömung der mittleren Geschwindigkeit überlagerte Geschwindigkeitsschwankung, so ist der zeitliche Mittelwert der gesamten Schwankungsenergie  $\overline{u'^2}$ . Es sei nun  $f(\omega)$  ( $\omega = 2\pi n$  Kreisfrequenz) die Verteilungsfunktion der Energie, für welche gilt

$$\int_0^\infty f(\omega) d\omega = 1 \dots \dots \dots (1)$$

Dann stellt

$$\overline{u'^2} f(\omega) \Delta\omega = \Delta A \dots \dots \dots (2)$$

den Beitrag dar, den das Frequenzband von der Breite  $\Delta\omega$  zur Gesamtenergie liefert, und

$$\overline{u'^2} \int_0^N f(\omega) d\omega = F(N) \dots \dots \dots (3)$$

den Beitrag, den das Frequenzband zwischen 0 und  $N$  liefert.

Es ist nun gleichgültig, welche der beiden Funktionen  $F(\omega)$  oder  $f(\omega)$  experimentell ermittelt wird. Die Aufnahme der Geschwindigkeitsschwankungen geschieht am besten mit einer Hitzdrahtbrückenschaltung, wie sie des öfteren beschrieben worden ist. Die Geschwindigkeitsschwankungen  $u'$  werden durch eine solche Schaltung in Spannungsschwankungen überführt. Durch Röhrenverstärker können diese Spannungsschwankungen verstärkt werden und durch geeignete Wahl des Arbeitspunktes der Röhren und durch Anwendung von Kompensationsschaltungen ist erreichbar, daß die Spannung am Ausgang des Verstärkers  $E' = k_1 u'$  wird ( $k_1 = \text{const}$ ).

Legt man jetzt diese Spannung an die beiden Spulen eines Elektrodynamometers, so zeigt dieses einen Wert an, der proportional zu  $\overline{u'^2}$  ist. Schaltet man aber vor das Dynamometer eine Siebkette, die nur die Frequenzen  $\omega \leq N$  gleichmäßig hindurchläßt, so ist der von dem Dynamometer angezeigte Wert

$$\overline{u'^2} \int_0^N f(\omega) d\omega = \overline{u'^2} F(N).$$

Durch Änderung von  $N$  an der Siebkette läßt sich die Kurve  $\overline{u'^2} F(N)$  punktweise bestimmen. Dieses Verfahren wurde von Simmons und Salter<sup>1)</sup> angewendet, um die Spektralkurven der turbulenten Schwankungen hinter einem Maschengitter in einem Windkanal zu ermitteln.

Nach einem Vorschlag von H. Reichardt, von dem auch die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen stammt, kann die Ermittlung von  $f(\omega)$  mittels einer Reihe von mechanischen Schwingungssystemen von verschiedenen Eigenfrequenzen  $\omega_0$  erfolgen, die durch einen zu  $E'$  proportionalen Strom  $J'$  elektromagnetisch erregt werden. Aus den Schwingungen dieser Systeme lassen sich die Werte von  $f(\omega)$  an den Stellen der Eigenfrequenzen  $\omega_0$  berechnen. Eine kurze Betrachtung soll dies zeigen.

Da bei den Versuchen, über die unten noch berichtet werden soll, als Schwingungssysteme Drehschwinger verwendet werden, so wollen wir die Formeln auch für Drehschwinger anschreiben. Bezeichnen wir mit

- $\Theta$  das Trägheitsmoment des Schwingers,
- $D$  die Direktionskraft des Torsionsfadens,
- $R$  die Reibungsziffer der Dämpfung,
- $M(t)$  das erregende Moment,

so lautet die Gleichung der Drehschwingung

$$\Theta \varphi'' + R \varphi' + D \varphi = M(t) \dots \dots \dots (4)$$

<sup>1)</sup> Simmons und Salter: An experimental determination of spectrum of turbulence. Proc. Roy. Soc. A 920, p. 73 (1938).

Nehmen wir zunächst einmal an, daß die turbulenten Schwankungen sich aus  $S$  diskreten harmonischen Schwingungen zusammensetzen, deren Frequenzen Vielfache von  $\Delta\omega$  sind. So können wir schreiben

$$k_1 u' = k_1 \sum_1^S c_\nu \sin(\nu \Delta\omega t - a_\nu) = E' = k_2 J' \dots \dots \dots (5)$$

Ist nun die Meßanordnung so gewählt, daß das erregende Moment

$$M(t) = k_3 J' = K \sum_1^S c_\nu \sin(\nu \Delta\omega t - a_\nu) \dots \dots \dots (6)$$

ist, dann erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi = \Phi e^{-\kappa t} \sin \omega_0 t + \sum_1^S C_\nu \sin(\nu \Delta\omega t - \Psi_\nu) \dots \dots \dots (7)$$

mit

$$\kappa = \frac{R}{\Theta} \dots \dots \dots (7a)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} \dots \dots \dots (7b)$$

und

$$C_\nu = \frac{K c_\nu}{\sqrt{\Theta \left(\frac{D}{\Theta} - (\nu \Delta\omega)^2\right)^2 + \kappa^2 (\nu \Delta\omega)^2}} \dots \dots \dots (7c)$$

Den ersten Term der Lösung (7) brauchen wir nicht weiter zu betrachten. Er klingt nach einiger Zeit ab. In dem zweiten Term stören die Phasenwinkel  $\Psi$ . Um sie herauszuschaffen, erheben wir diesen Term ins Quadrat und bilden den zeitlichen Mittelwert. Es ergibt sich dann der einfache Ausdruck

$$\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} \sum_1^S C_\nu^2 \dots \dots \dots (8)$$

Von dem Quadrat der Gl. (5) bilden wir ebenfalls den zeitlichen Mittelwert und erhalten

$$\overline{J'^2} = \frac{1}{2} k_1^2 \sum_1^S c_\nu^2 = k_1 \overline{u'^2} \dots \dots \dots (9)$$

Die Größen  $c_\nu^2$  sind nun Teilbeträge der gesamten Schwankungsenergie. Nach Gl. (2) und (9) können wir setzen

$$c_\nu^2 = 2 \overline{u'^2} f(\omega) \Delta\omega \dots \dots \dots (10)$$

Ist nun  $S$  eine sehr große Zahl ( $S \rightarrow \infty$ ) und  $\Delta\omega$  sehr klein ( $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ ), so läßt sich in Gl. (8) die Summe als Integral schreiben. Sie lautet dann, wenn wir noch die Werte für  $C_\nu^2$  und  $c_\nu^2$  einführen,

$$\overline{\varphi^2} = K_1 \overline{u'^2} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\left(\frac{D}{\Theta} - \omega^2\right)^2 + \kappa^2 \omega^2} d\omega \dots \dots \dots (11)$$

Um auf einfache Weise hieraus die Spektralkurve  $f(\omega)$  zu ermitteln, bedenken wir, daß sich (11) auch schreiben läßt

$$\overline{\varphi^2} = K_1 \overline{u'^2} f(\omega_z) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(\frac{D}{\Theta} - \omega^2\right)^2 + \kappa^2 \omega^2} \dots \dots \dots (12)$$

worin  $f(\omega_z)$  der Wert der Spektralkurve an einer Zwischenstelle  $\omega_z$  bedeutet. Da ferner gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{D}{\Theta} - \omega^2\right)^2 + \kappa^2 \omega^2} = \frac{\pi}{\kappa \omega_0^2} \dots \dots \dots (13),$$

so ergibt sich, wenn wir nach  $f(\omega_z)$  auflösen,

$$f(\omega_z) = K_2 \frac{\bar{\varphi}^2}{\omega^2} \omega_0^2 \kappa \dots \dots \dots (14).$$

Die Stelle  $\omega_z$  ist uns nicht bekannt. Für kleine  $\kappa$  ist aber die Resonanzbreite des Schwingers sehr schmal. Wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir als Näherung setzen:  $\omega_z \approx \omega_0$ . Um die Größe dieses Fehlers zu ermitteln, wurden bei den Messungen (siehe unten) dem Schwinger verschiedene Dämpfungen gegeben. Es zeigte sich hierbei, daß für Frequenzen  $n \geq 4$  Hz., der Fehler innerhalb der Meßgenauigkeit lag. Für tiefere Frequenzen dagegen war ein Fehler festzustellen. Es ließ sich aber die durch Versuche ermittelte Abhängigkeit der Größe  $\bar{\varphi}^2$  von  $\kappa$  durch eine Potenz darstellen. Wir erhalten somit für sehr tiefe Frequenzen die empirische Formel

$$f(\omega_0) = K_3 \frac{\bar{\varphi}^2}{\omega^2} \omega_0^2 \kappa^p \dots \dots \dots (15).$$

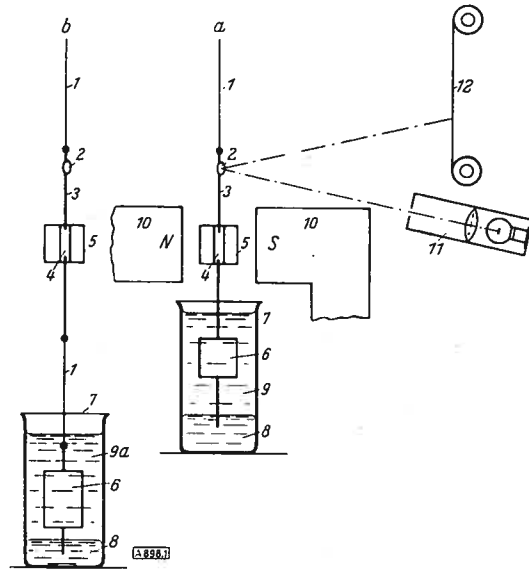


Abb. 1.

Die Apparatur, mit der nach diesem Verfahren Frequenzanalysen durchgeführt wurden, ist in der Abb. 1 schematisch dargestellt. Es wurden als Schwingungssysteme Drehschwinger verwendet. An einem dünnen Torsionsfaden ist als Achse des Schwingers ein steifer Draht aufgehängt, der durch ein Glasröhrchen in der Mitte geteilt ist, so daß zwischen dem oberen und dem unteren Stück keine elektrisch leitende Verbindung besteht. An dem unteren Ende trägt die Achse einen Schwingkörper, an dem oberen einen Spiegel und in der Mitte eine Spule. Ein Ende dieser Spule ist mit dem oberen Stück der Schwingerachse, das andere mit dem unteren verlötet. Die Stromzuführung geschieht durch den Torsionsfaden und durch einen dünnen Platindraht, der in ein Gefäß mit Quecksilber taucht. In dem Gefäß befindet sich über dem Quecksilber eine Dämpfungsfüssigkeit. In diese hinein taucht der Schwingkörper. Bei Eigenfrequenzen über 20 Hz. zeigte es sich, daß es vorteilhafter ist, dem Drehschwinger einen etwas anderen Aufbau zu geben (Abb. 1 b). Da das Trägheitsmoment der Spule und des Spiegels groß genug ist, erübrigt sich die Anbringung eines zusätzlichen Trägheitsmomentes. Dagegen ist das Gewicht der Spule zu gering, um den Torsionsfaden zu straffen. Es befindet sich daher an dem unteren Ende der Schwingerachse ein zweiter Torsionsfaden, an dem ein Gewicht hängt, das beide Fäden strafft. Durch dieses Gewicht wird weiter erreicht, daß der Drehschwinger stets senkrecht hängt, wodurch überlagerte

Schwingungen, hervorgerufen durch das Schwerfeld, vermieden werden. Das Gewicht taucht in ein zähes Öl und bleibt bei den schnellen Oszillationen des Schwingers praktisch in Ruhe.

In der zur Verfügung stehenden Apparatur befinden sich 6 Schwinger der ersten und 4 Schwinger der zweiten Art. Die Eigenfrequenzen liegen zwischen 0,2 und 43 Hz. Die Schwinger sind so aufgehängt, daß sich die Spulen zwischen den Polen N und S eines Elektromagneten befinden. Für jeden Schwinger ist eine Beleuchtungsrichtung vorhanden. Der von dieser Beleuchtungsrichtung ausgehende Lichtstrahl wird von dem Spiegel reflektiert und fällt auf einen Filmstreifen. Letzterer kann mittels eines Motors mit verschiedenen Geschwindigkeiten vorbeigezogen werden. Die ganze Apparatur ist in einem lichtdichten Kasten untergebracht.

An die Spulen der Schwinger wird nun die Ausgangsspannung  $E'$  des Verstärkers gelegt. Durch die jetzt auf die Spulen wirkenden Drehmomente werden die Schwinger angeregt und ihre Schwingungen werden auf den Filmstreifen aufgezeichnet. Die Versuche haben gezeigt, daß zur Erlangung guter Mittelwerte Beobachtungszeiten von 12 bis 15 Minuten erforderlich sind.

Wie aus der Formel (15) hervorgeht, sind für die die Berechnung von  $f(\omega_0)$  verschiedene Größen erforderlich. Die Konstante  $K_2$  wird durch Eichung für jeden einzelnen Schwinger ermittelt.  $\bar{u}^2$  wird mit dem Dynamometer gemessen. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen werden während der Messungen auf den Filmstreifen in gewissen Zeitabständen Lichtmarken gegeben. Das logarithmische Dekrement  $\kappa$  ergibt sich aus der Abklingkurve der Schwinger. Der quadratische Mittelwert der Amplitude  $\bar{\varphi}^2$  wird aus den aufgezeichneten Schwingungskurven mittels eines Quadratplanimeters bestimmt. Zur Ermittlung der Abhängigkeit des Wertes  $\bar{\varphi}^2$  von  $\kappa$  ist es notwendig, verschiedene Meßreihen aufzunehmen mit geänderter Dämpfung der Schwinger. Aus den zu einem Schwinger gehörenden Werten ist durch logarithmische Auftragung der Exponent  $p$  und der Faktor  $K_3$  für diesen Schwinger zu finden.

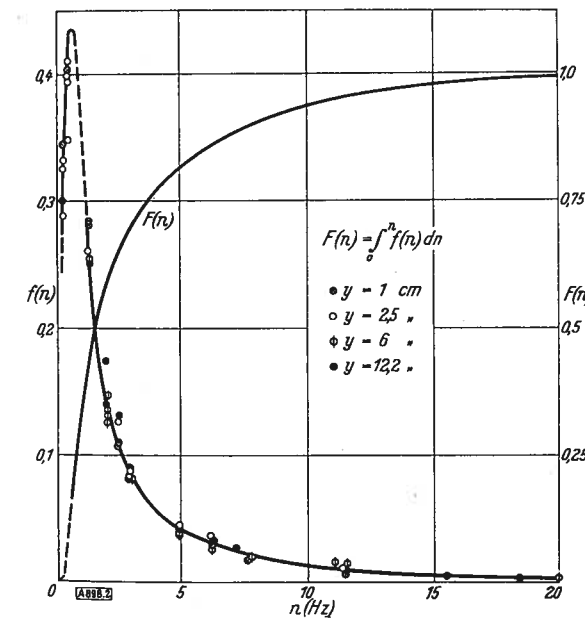


Abb. 2.

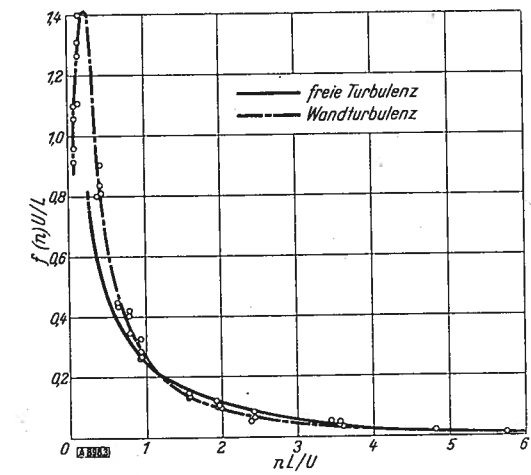


Abb. 3.

In der Abb. 2 sind nun die Ergebnisse der Messungen wiedergegeben, die der Verfasser in der turbulenten Strömung eines rechteckigen Kanals von 24 cm Höhe und 100 cm Breite bei einer Mittengeschwindigkeit von 100 cm/s nach diesem Verfahren durchgeführt hat. Es zeigte sich dabei, daß innerhalb der Meßgenauigkeit die Spektralkurven für die verschiedenen Wandabstände zusammenfallen.

In der Abb. 3 werden nun diese Ergebnisse mit denen von Simmons und Salter verglichen. Als Ordinate ist hier aufgetragen  $\frac{Uf(n)}{L}$  über der Abszisse  $\frac{nL}{U}$ . Für die Turbulenz hinter einem Gitter ist  $U$  die mittlere Geschwindigkeit im Windkanal und  $L$  die Maschenweite des Gitters. Für die Wandturbulenz ist  $U$  die mittlere Geschwindigkeit im Kanal und  $L$  die Kanalhöhe. Die ausgezogene Kurve gibt die Ergebnisse von Simmons und Salter wieder. Man sieht, daß sie mit den unseren gut vergleichbar sind.